



非匀速运动介质系统中的动生麦克斯韦方程组——低速与非相对论近似

王中林^{1,2,3*}, 邵佳佳^{1,2}

1 中国科学院北京纳米能源与系统研究所, 北京 101400;

2 中国科学院大学纳米科学与技术学院, 北京 100049;

3 佐治亚理工学院材料科学与工程学院, 亚特兰大 30332-0245, 美国

* E-mail: zlwang@binn.cas.cn

收稿日期: 2022-05-19; 接受日期: 2022-06-17; 网络版发表日期: 2022-07-08

摘要 运动介质系统中的电磁场随时间的演化规律是工程技术和应用物理都很关注的核心问题之一. 本文首先对比和分析了基于狭义相对论的标准理论和伽利略电磁学的相关发展. 接着我们从四大物理定律出发, 通过麦克斯韦方程组的积分式, 推导出适用于非匀速运动介质在非相对论近似下的动生麦克斯韦方程组. 该方程组引入了(机械)力-电-磁的耦合场, 拟解决在非惯性系中低速变速运动介质以及介质形状和边界随时间变化情况下的电磁场动力学变化规律. 方程组中引入的动生极化项 \mathbf{P}_S 是由外力作用到带电介质并引起介质的加速运动而导致的, 它不同于由电场导致的感应极化项 \mathbf{P} . 当存在力-电-磁多场耦合时, 方程组不应该保持洛伦兹协变性, 且系统的电磁能量不守恒, 但封闭系统的总能量守恒. 介质运动是产生电磁波的源之一(动生电), 描述介质里面的电磁现象使用动生麦克斯韦方程组; 当源产生的电磁波在空间传播时使用狭义相对论和经典的麦克斯韦方程组, 两者在介质界面相接并满足边界条件.

关键词 动生麦克斯韦方程组, 动生极化, 相对论

1 引言

麦克斯韦方程组(Maxwell equations)和洛伦兹力公式(Lorentz formula)是电磁学理论中揭示电磁现象本质的核心方程. 电动力学作为四大力学之一, 主要侧重研究电磁场的基本属性、动力学演化规律以及与带电物质的相互作用, 也包括带电粒子随时间的变化规律. 其逻辑体系是把麦克斯韦方程和洛伦兹力方程

作为两个基本公理, 也有理论认为电动力学的基本公理是麦克斯韦方程组和电磁场的能动张量^[1]. 我们关注的是如何利用电磁场的基本理论解决工程技术中的实际问题, 比如当电磁场中存在有场源或带电介质的相对运动时, 特别是具有非惯性系的加速运动时, 运动介质系统的电磁场随着时间如何演化. 一般情况下, 应用狭义相对论和洛伦兹变换来阐述运动介质的电磁特性, 该方法由闵可夫斯基在1908年提出^[2,3]. 相对论

引用格式: 王中林, 邵佳佳. 非匀速运动介质系统中的动生麦克斯韦方程组——低速与非相对论近似. 中国科学: 技术科学, 2022, 52
Wang Z L, Shao J J. Maxwell's equations for a mechano-driven varying-speed motion media system under slow motion and nonrelativistic approximations (in Chinese). Sci Sin Tech, 2022, 52, doi: 10.1360/SST-2022-0176

时空观代替了牛顿的绝对时空概念, 在时间和空间统一的时空观下结合真空中的光速不变原理构成了狭义相对论的基础, 并通过洛伦兹变换整体反映出来^[4~7]. 无论是在静止的实验室 S 系, 还是在以相对匀速运动的惯性系 S' 系, 麦克斯韦方程组具有相同的形式, 即洛伦兹协变性; 运动介质的本构方程通过场矢量的洛伦兹变换公式而得到, 即物理现象的规律在所有惯性系中的表达形式是不变的. 我们常见的麦克斯韦方程组是直接描述静止介质系统的方程组, 其特点在绝大多数文献中鲜有提及. 利用洛伦兹变换可以推导出不同惯性参考系中的场矢量表达式. 然而, 所有的推导都是基于相对匀速直线运动的介质. 尽管这种方法可以得到广泛应用并描述宇宙间真空中的电磁场现象, 但对于地球上我们关注的非匀速运动需要做相应的近似处理或改进.

根据狭义相对论, 在处理运动介质的电磁场时, 涉及时空导数变换、场矢量坐标变换(电场强度 \mathbf{E} 、磁感应强度 \mathbf{B} 、电位移矢量 \mathbf{D} 、磁场强度 \mathbf{H})、本构关系坐标变换(极化矢量 \mathbf{P} 和磁化矢量 \mathbf{M})等. 毫无疑问, 当麦克斯韦方程组和洛伦兹力确定后, 它们的解可以描述某一系统的电磁场特性. 经典麦克斯韦方程组的微分形式为^[4,8,9]

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}, \quad (1d)$$

其中, ρ 表示自由电荷密度, \mathbf{J} 代表电流密度, ε_0 和 μ_0 分别表示真空介电常数和真空磁导率. 方程(1b)和(1d)含有 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的时间导数, 属于演化方程; 方程(1a)和(1c)不含时间导数, 对每一时刻的 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 与下一时刻的 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 之间的关系没有约束, 只是对场量的瞬时值进行限制, 称为约束方程. 满足方程(1a)和(1c)的初始值后, 系统按照方程(1b)和(1d)进行演化, 且在演化过程中始终满足方程(1a)和(1c), 保证了麦克斯韦方程组内部的自洽性和电荷守恒性^[1]. 假设已知 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ 和电磁场源 $\rho(\mathbf{r}, t)$ 和 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ 的初始值, 即便两者之间存在相互作用, 仍可根据方程组确定其任何时刻的变化.

当只有一种匀速直线运动介质时, 假设相对介质

静止的 S' 系的本构关系已知, 求解麦克斯韦方程组得到电磁场随时间的变化表达式; 再通过场矢量变换的洛伦兹公式可知道 S 系中介质的电磁场演化规律. 该方法需严格满足三个条件: (1) 介质做匀速直线运动; (2) 介质的性质由本构方程预先设定; (3) S 系中的静止介质和 S' 系中的运动介质之间没有电磁相互作用, 只是观察者的坐标系互换. 因此, 当有两种或两种以上运动介质, 并且多个相对运动介质之间有电磁作用时, 即每一个介质不是独立存在的, 则无法应用洛伦兹变换来单个求解. 因为在一个介质静止的惯性系中, 其他介质是相互运动的(图1所示). 特别地, 如果多个介质做非匀速运动, 运动的轨迹复杂多变, 比如有曲线运动, 往复的周期转动或震动. 同时介质的形状和边界随时间会发生变化, 例如软物质或流体介质等, 精确分析这样一个多运动介质系统的电磁场动力学规律面临巨大的挑战. 理论物理学家的思路与工程应用中的实际处理方法往往不同, 前者可能更注重理论的绝对精确和完美, 而后者更强调方法的实用性和解决问题的有效性. 比如伽利略变换, 它与洛伦兹变换有着本质区别. 在伽利略变换中, 时间对两个惯性系间的坐标变化没有影响, 但同样可以解决不同机械运动下的参考系变换问题^[9,10]. 另外一个处理实际问题的典型例证是伽利略电磁学, 它利用洛伦兹近似变换、伽利略变换等方法研究惯性系的低速匀速运动介质的电磁场变化规律^[11,12]. 描述电极限和磁极限的方程是麦克斯韦方程组的近似处理和变形, 这些方程并不保持洛伦兹协变性. 但是该思路和方法为工程师和物理学家提供了一个分析大量电磁现象的有效方法^[11~15].

本文从工程应用角度出发, 提出了非匀速运动介质中的动生麦克斯韦方程组(Maxwell equations for a mechano-driven slow-moving media system). 方程组引入(机械)力-电-磁的耦合场, 解决低速变速运动介质以及介质形状和边界随时间变化的电磁场动力学演化规律. 方程组的推导从四大物理定律的积分式出发, 在低速和非相对论近似下, 利用伽利略时空观来处理非惯性系中的电磁现象. 我们重点阐述了动生麦克斯韦方程组的建立背景、物理图像以及与经典处理方法的区别. 文章第2节介绍相对论时空观、洛伦兹变换、麦克斯韦方程组的协变性和本构关系; 第3节详细介绍伽利略电磁学及其适用范围、伽利略变换、准静态近似下的电极限和磁极限. 在上述基础上, 我们重点描述了

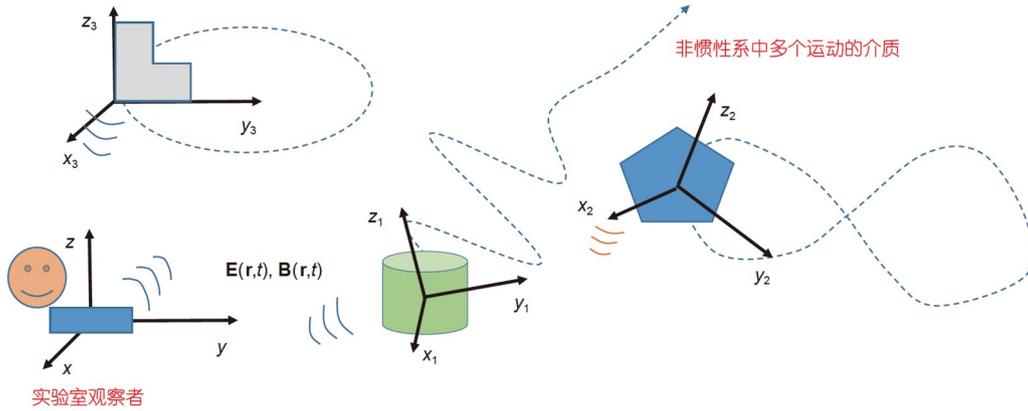


图1 (网络彩版图)存在外力作用的运动介质系统, 观察者在地面坐标系(实验室坐标系)观察. 不同介质以不同的速度沿着虚线所表示的轨迹运动. 在此情况下, 洛伦兹变换难以解决问题

Figure 1 (Color online) Mechano-driven moving media system. A general case in which the observer is on the ground frame (called Lab frame), with several media moving at complex velocities along various trajectories as represented by the dashed lines. The medium can translate, rotate, expand and even split. In such a case, the Lorentz transformation for special relativity cannot be easily applied.

动生麦克斯韦方程组的数学表达式、非协变性、动生极化项、力-电-磁的耦合场等物理含义和适用范围等. 最后对运动介质力学的相关理论进行总结, 并对下一阶段要解决的关键问题提出建议.

2 相对论时空观: 物质、时间与空间相关的时空观

狭义相对论是近代物理学的一大支柱, 其两个著名的假设为: (1) 相对性原理, 物理定律在所有的惯性系中都具有相同的表达形式; (2) 光速不变原理, 光在真空中传播的速度相对于任何惯性系沿着任意方向都是 c , 且与光源运动与否无关. 爱因斯坦根据这两个基本假设推导出了反映相对论时空观的基本变换——洛伦兹变换. 以惯性坐标 S 系和相对于其以恒定速度 \mathbf{v}_0 运动的 S' 系为例, 两坐标系之间的空间和时间坐标的洛伦兹变换关系式如下:

$$x' = \gamma(x - v_0 t), \quad (2a)$$

$$y' = y, \quad (2b)$$

$$z' = z, \quad (2c)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right), \quad (2d)$$

$$\text{其中, } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \beta = \frac{v_0}{c}.$$

洛伦兹变换是狭义相对论建立的基础, 由此可窥探到狭义相对论的重要时空图像: 同时的相对性、时间延缓和长度收缩. 当时间和空间按照洛伦兹变换时, 在惯性系中的物理定律保持数学形式不变, 称为洛伦兹协变性. 更广泛地, 描述自然界规律的数学方程在洛伦兹群的变化下保持形式不变^[1]. 对于麦克斯韦方程组的协变性和运动介质的电动力学, 我们分别结合洛伦兹微分变换法和闵可夫斯基的四维时空世界及张量分析方法进行简要论述.

结合两个惯性系中时空坐标的洛伦兹变换公式, 可分别得到电荷密度 ρ 、电流密度 \mathbf{J} , \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} 和 \mathbf{H} 等物理量的变化关系. ρ 和 \mathbf{J} 在两个惯性系中的表达式为^[16]

$$\rho = \gamma\left(\rho - \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{v}_0}{c^2}\right), \quad (3a)$$

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J} - \gamma\rho\mathbf{v}_0 + (\gamma - 1)(\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{v}}_0)\hat{\mathbf{v}}_0. \quad (3b)$$

由公式(3)可知, 实验室坐标系中的电荷在运动坐标系中形成电荷和电流, 其电流也在运动坐标系中形成电流和电荷, 相反亦然. 电荷总量在两坐标系变换时是不变量, 即为电荷不变性. S 系和 S' 系中场矢量的变换表达式如下^[16]:

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}) - (\gamma - 1)(\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{v}}_0)\hat{\mathbf{v}}_0 \quad (4a)$$

$$\mathbf{B}' = \gamma\left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}_0 \times \mathbf{E}}{c^2}\right) - (\gamma - 1)(\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{v}}_0)\hat{\mathbf{v}}_0 \quad (4b)$$

$$\mathbf{D}' = \gamma \left(\mathbf{D} + \frac{\mathbf{v}_0 \times \mathbf{H}}{c^2} \right) - (\gamma - 1)(\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{v}}_0) \hat{\mathbf{v}}_0, \quad (4c)$$

$$\mathbf{H}' = \gamma (\mathbf{H} - \mathbf{v}_0 \times \mathbf{D}) - (\gamma - 1)(\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{v}}_0) \hat{\mathbf{v}}_0, \quad (4d)$$

其中, $\hat{\mathbf{v}}_0 = \frac{\mathbf{v}_0}{\|\mathbf{v}_0\|}$ 是速度单位矢量. 进一步地, 矢量势 \mathbf{A} 和标量势 φ 的相对论变换表达式为

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \frac{\gamma \varphi}{c^2} \mathbf{v}_0 + (\gamma - 1)(\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{v}}_0) \hat{\mathbf{v}}_0, \quad (5a)$$

$$\varphi' = \gamma(\varphi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_0). \quad (5b)$$

由以上表达式可以看出, 同一时刻 S 系中的 \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{H} 与 S' 系中的场矢量 \mathbf{E}' , \mathbf{B}' , \mathbf{D}' , \mathbf{H}' 互相联系, 对应的时空坐标 (\mathbf{r}, t) 和 (\mathbf{r}', t') 之间的关系由洛伦兹变换确定. 由公式(4)可知, \mathbf{E} , \mathbf{B} 对 \mathbf{E}' , \mathbf{B}' 有贡献; \mathbf{D} , \mathbf{H} 对 \mathbf{D}' , \mathbf{H}' 也有贡献, 反之亦成立. 物理含义将在闵可夫斯基的四维时空中描述.

运动系统的电动力学包含两种基本情况: 导体的运动和介电体的运动. 前者的详细研究可以参考文献[6]第63节的内容, 介电体运动导致电场和磁场的相互作用是我们研究的重点. 与闵可夫斯基的1908年的处理方法不同, 朱兰成(朱氏)提出了另外一种思路^[17]. 两者的主要区别在于介质的微观模型不同, 通过本构关系体现出来. 朱氏的微观模型考虑了介质运动速度对极化和磁化的修正, 其公式中包含了速度项 \mathbf{v}_0 , 是非相对论的理论. 闵可夫斯基的核心是在介质静止或运动的惯性系中, 麦克斯韦方程组是洛伦兹协变的, 介质运动引起的额外效应体现在本构关系中. 闵可夫斯基的四维空间概念更容易将麦克斯韦方程组的协变形式表示出来. 由于时间和空间是不可分割的统一整体, 闵可夫斯基用 $ict = x_4$ 作为空间中的第四个坐标, 构成四维空间. 电场和磁场矢量的分量实际上是电磁场张量的一些分量. 当进行不同惯性系间的坐标变换时, 电磁场张量是不变量, 但分量随着坐标不同而发生变化. 对于方程

$$\frac{\partial}{\partial x^k} F^{*ik} = 0, \quad (6a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k} H^{ik} = J^i, \quad (6b)$$

其中, $\mathbf{J} = (J^1, J^2, J^3)$, $J^4 = i\rho$; F^{*ik} 为对偶张量. 上述公式只有在惯性系中的介质做匀速直线运动时才严格成立. 张量形式的电动力学已经有大量研究, 此处不再详

述. 虽然通过相对论变换, 麦克斯韦方程组的四个方程可以变形为两个简洁、优美的方程, 但在处理运动介质的电磁场动力学演化时, 方程本身的复杂程度和电动力学的原理并没有得到简化, 变化的只是表达形式.

3 运动介质电动力学: 伽利略电磁学

绝对时空观是物质、时间与空间无关的时空观. 伽利略构造了伽利略变换来研究不同参考系之间的坐标变换问题. 如果 \mathbf{r} 为 S 系中 t 时刻 (x, y, z) 处某事件的位置矢量, \mathbf{r}' 为 S' 系中 t' 时刻 (x', y', z') 处同一事件的位置矢量, 则伽利略变换关系如下:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t', \quad (7a)$$

$$t' = t. \quad (7b)$$

洛伦兹变换公式(2)变形为^[10]

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\gamma - 1) \left(\mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{v}_0}{v_0} \right) \frac{\mathbf{v}_0}{v_0} - \gamma \mathbf{v}t', \quad (8a)$$

$$ct' = \gamma(ct - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}). \quad (8b)$$

洛伦兹变换近似为伽利略变换的条件为^[10]

$$\frac{v_0}{c} \ll 1, \quad (9a)$$

$$|\mathbf{r}| \ll ct, \quad (9b)$$

$$\left| \frac{\mathbf{v}_0 \cdot \partial}{c^2 \partial t'} \right| \ll |\nabla|. \quad (9c)$$

物理意义分别是: (1) 介质运动速度远小于光速; (2) 电磁现象发生范围的 \mathbf{r} 远小于在事件时间间隔中光所传播的距离; (3) 电磁现象随时间的变化率远小于它的空间变换率. 所以, 伽利略变换反应的规律主要是: 低速、小范围和随时间变化缓慢的情况. 因此, 麦克斯韦方程组的洛伦兹协变性是场论的基础, 而伽利略变换是工程电磁学的最有效处理方法.

1973年LBLL (Le Bellac and Levy-Leblond)首次提出伽利略电磁学的概念, 并强调伽利略电磁学不是相对论电磁学的替代品, 而恰恰是其在经典电磁学中的低速极限^[11]. 从描述静态介质的麦克斯韦方程组出发, 对于匀速的运动介质做瞬时准静态处理(instantaneous quasi-static approximation), 利用伽利略变换和本构关系进行相关数学推导. 这种伽利略近似(Galilean approximation)主要分为两种情况: 电极限(electric limit)

和磁极限(magnetic limit), 分别对应于静电学(electro-quasi-static approximation)和静磁学(magneto-quasi-statics approximation)^[11~15].

当 $|\mathbf{E}| \gg c|\mathbf{B}|$, $c|\rho| \gg |\mathbf{J}|$, $|\mathbf{v}_0| \ll c$ 时, 可以得到电极限下的场矢量:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}, \quad (10a)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{v}_0 \times \mathbf{E}), \quad (10b)$$

$$\rho' = \rho, \quad (10c)$$

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J} - \mathbf{v}_0 \rho. \quad (10d)$$

同时, 伽利略变换公式(7)变形为

$$\nabla' = \nabla, \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla. \quad (11)$$

电极限下的麦克斯韦方程组近似为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (12a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (12b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (12c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}. \quad (12d)$$

可以看出, 当电场 \mathbf{E} 和电荷密度 ρ 占主导地位时适用于电极限方程. 这些方程对应于准静态近似下的静电学方程, 描述容性效应而不是感应效应. 另外, 对于磁极限, 当 $|\mathbf{E}| \ll c|\mathbf{B}|$, $c|\rho| \ll |\mathbf{J}|$, $|\mathbf{v}_0| \ll c$ 时, 得到磁极限下的场矢量:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}, \quad (13a)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}, \quad (13b)$$

$$\rho' = \rho - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{J}, \quad (13c)$$

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J}. \quad (13d)$$

此时, 伽利略变换公式(11)保持不变, 磁极限下的麦克斯韦方程组近似为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (14a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (14b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (14c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (14d)$$

可以看出, 当磁场 $c\mathbf{B}$ 和电流密度 \mathbf{J} 占主导地位时适用于磁极限方程. 这些方程对应于准静态近似下的静磁学方程.

另一方面, 可以从麦克斯韦方程组本身来推导电极限和磁极限方程^[10]. 在一阶洛伦兹变换下, 当 $\beta^2=1$, $\gamma=1$ 时, 狭义相对论给出的场矢量变换为

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}, \quad (15a)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{v}_0 \times \mathbf{E}), \quad (15b)$$

$$\mathbf{D}' = \mathbf{D} + \frac{1}{c^2}(\mathbf{v}_0 \times \mathbf{H}), \quad (15c)$$

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} - \mathbf{v}_0 \times \mathbf{D}. \quad (15d)$$

若 $\frac{1}{c^2}|\mathbf{v}_0 \times \mathbf{E}| \ll |\mathbf{B}|$, $\frac{1}{c^2}|\mathbf{v}_0 \times \mathbf{H}| \ll |\mathbf{D}|$, 可以得到伽利略变换下的场矢量在两坐标系之间的变换公式:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}, \quad (16a)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}, \quad (16a)$$

$$\mathbf{D}' = \mathbf{D}, \quad (16b)$$

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} - \mathbf{v}_0 \times \mathbf{D}. \quad (16b)$$

当 $\frac{1}{c^2}|\mathbf{v}_0 \times \mathbf{H}| \ll |\mathbf{D}|$ 则得到电极限下的麦克斯韦方程组. 实际上此时忽略了 $\frac{1}{c^2}|\mathbf{v}_0 \times \mathbf{H}|$ 项, 也就是忽略了 \mathbf{H} 导致的电效应, 对应于 $\partial\mathbf{B}/\partial t = 0$ 的似稳场情况, 电场 \mathbf{E} 和电荷密度 ρ 占主导地位. 当 $\frac{1}{c^2}|\mathbf{v}_0 \times \mathbf{E}| \ll |\mathbf{B}|$ 则得到磁极限下的麦克斯韦方程组. 此时忽略了 $\frac{1}{c^2}|\mathbf{v}_0 \times \mathbf{E}|$ 项, 也就是忽略了 \mathbf{E} 导致的磁效应, 对应于 $\partial\mathbf{D}/\partial t = 0$ 的似稳场情况, 此时磁场 $c\mathbf{B}$ 和电流密度 \mathbf{J} 占主导地位. 所以场矢量的伽利略变换式中, \mathbf{D} , \mathbf{H} 的变换关系对应于 $\partial\mathbf{B}/\partial t = 0$ 的似稳场; \mathbf{E} , \mathbf{B} 的变换关系对应于 $\partial\mathbf{D}/\partial t = 0$ 的似稳场. 伽利略变换和洛伦兹变换的区别与联系在上述条件下得以清晰展现.

由以上分析可知, 洛伦兹变换的低速极限与伽利略变换有着本质不同, 对洛伦兹变换的一阶近似继续施加边界条件变形即得到伽利略变换. 文献[18]对两者的关系也进行了分析. 描述电磁波的空间传输或宇宙空间中的电磁现象应该使用洛伦兹变换, 但对于地球上的工程技术所涉及的电磁现象, 伽利略变换更具实际操作意义. 比如, 闵可夫斯基的理论特别适用于

描述高速运动物体的光学实验——菲涅耳-菲索效应, 但解释威尔逊效应和单极感应(Wilson's effect and homopolar induction)运用磁极限方程组更合理^[19,20]. 事实上, 伽利略电磁学在欧洲的研究已超过50年的历史, 该理论为工程师和应用物理学家解释大量电磁现象提供了一个很好的方法. 相对论电动力学在解释介质以光速运动时可能非常精确, 而伽利略电磁学则更容易处理低速运动介质的电磁现象, 因为此时不考虑低速运动时狭义相对论所引入的运动学效应. 伽利略电磁学不是狭义相对论的替代品, 它恰恰是准确描述低速极限下狭义相对论的经典电磁学理论^[11].

4 运动介质电动力学: 动生麦克斯韦方程组

4.1 低速运动介质的麦克斯韦方程组: 积分形式与微分形式

如果不加说明, 常见文献中的麦克斯韦方程组指的是静止介质的方程, 默认介质处于静止状态^[7~10]. 当介质的体积和边界固定不变或与时间无关时, 可以直接求解电磁场变化规律. 为了解决低速变速运动的、具有复杂运动轨迹的、多个运动介质的电磁场动力学演化规律, 包括介质形状和运动边界随时间发生变化的情形, 我们构建了低速运动介质的动生麦克斯韦方程组^[21,22](图2所示). 从四大基本物理定律的积分式出发, 假设: (1) 介质运动速度可变但远小于光速:

$|\mathbf{v}| \ll c$; (2) 电磁现象发生范围的 \mathbf{r} 远小于在事件时间间隔中光所传播的距离, $|\mathbf{v}| \ll ct$; 此时, 相对论效应可以忽略; (3) 介质的形状和边界不变, 并且其运动是刚体平移. 我们从四大物理定律的积分表达式出发.

高斯电定律: 穿过闭合曲面的电通量正比于曲面包含的总电荷:

$$\oiint_S \mathbf{D}' \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \rho_f d\mathbf{r}. \quad (17a)$$

高斯磁定律: 磁单极不存在, 它不是磁通量的源 (there are no magnetic monopoles as sources of magnetic flux).

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (17b)$$

法拉第电磁感应定律: 穿过曲面的磁通量的变换率等于感生电场的环量(the time rate of change of magnetic flux is a source of electric circulation).

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt} \iint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (17c)$$

安培-麦克斯韦定律: 穿过曲面的电通量的变化率和曲面包含的电流等于感生磁场的环量(electric conduction current and displacement current are sources of magnetic circulation).

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \iint_C \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} + \frac{d}{dt} \iint_C \mathbf{D}' \cdot d\mathbf{s}. \quad (17d)$$

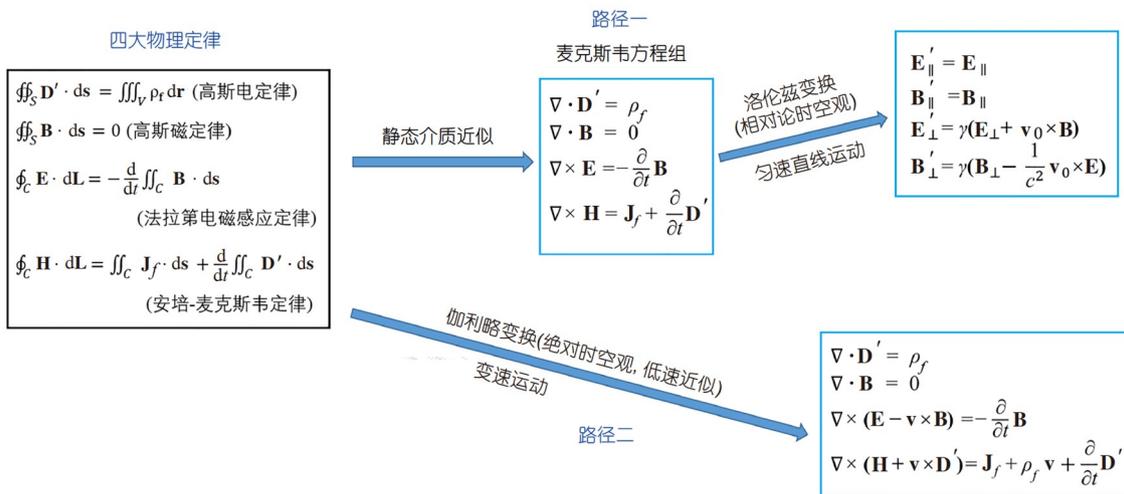


图 2 (网络彩版图)物理图像与数学表达式: 从四大物理定律出发进行洛伦兹变换和伽利略变换的结果比较
 Figure 2 (Color online) Physical pictures and mathematical expressions. Starting from the integral form of the four physics laws, the calculation results are compared through the Lorentz's transformation and Galilean transformation.

利用场论中时间微分作用在通量上的数学等式, 在伽利略时空观的前提下, 即 \mathbf{r} 和 t 是完全独立的, 动生麦克斯韦方程组的积分形式被推导为^[21,22]

$$\oiint_S \mathbf{D}' \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \rho_f d\mathbf{r}, \quad (18a)$$

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (18b)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \iint_C \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}, \quad (18c)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \iint_C (\mathbf{J}_f + \rho_f \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{s} + \iint_C \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}' \cdot d\mathbf{s} - \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{D}') \cdot d\mathbf{l}, \quad (18d)$$

注意, 为了和我们之前发表的文献保持一致, 这里的 \mathbf{D}' 不代表运动 S' 系中的电位移矢量, 而是代表不包括动生极化项 \mathbf{P}_S 的电位移矢量. 另外, 这里并不需要有些学者从微分式推导所做的“运动场点”的假设. 公式(18c)左边表示感生电场对沿着 C 路径移动对单位电荷所做的功, 右边第一项表示磁场变化率产生的磁通量变换率, 第二项表示单位电荷在洛伦兹力作用下沿闭合路径移动所做的功(动生电动势). 公式(18d)左边为磁场沿着整条路径 $d\mathbf{l}$ 累加得到的环量, 右边第一项表示电流和电荷流动穿过环绕路径 C 的通量, 第二项为位移电流的电通量变化率, 第三项为介质运动对磁场的影响. 即磁通量的变化率产生感应电场, 电通量的变化率产生旋转磁场, 两种情况分别由安培-麦克斯韦定律和法拉第电磁感应定律描述. 上述公式经过变形后和原方程具有同样的形式; 特别的, 当 \mathbf{v} 为0时, 和原方程完全相同^[23]. 注意: 公式(18c)和(18d)中的速度相关项(共三项)是产生电磁场的源之一. 如果介质在运动, 描述介质内部的电磁现象可以直接用动生麦克斯韦方程, 介质外面的电磁场变化可使用经典的麦克斯韦方程组, 两者分区管辖, 互相耦合, 详述见下文. 利用Stokes定律, 微分形式的动生麦克斯韦方程组为

$$\nabla \cdot \mathbf{D}' = \rho_f, \quad (19a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (19b)$$

$$\nabla \times (\mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (19c)$$

$$\nabla \times (\mathbf{H} + \mathbf{v} \times \mathbf{D}') = \mathbf{J}_f + \rho_f \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}'. \quad (19d)$$

从四大物理定律的积分式出发, 采用洛伦兹变换和伽利略变换两种不同方法计算运动介质电磁场的动

力学变化规律的主要区别如图2所示. 通过瞬时坐标系变换, 原则上可以计算惯性系中任意匀速运动介质的电磁场; 但正如图1所示的情况, 当存在多个不同速度、不同运动轨迹的运动介质, 且介质之间有电磁相互作用时, 洛伦兹变换方法的局限性逐渐显现. 相反, 当介质运动速度远小于光速, 尤其是符合公式(9)描述的几种情况时, 采用伽利略变换大大简化了计算, 更符合实际应用场景. 另外, 通过伽利略变换得到的公式(19)和狭义相对论所推导出的公式具有不同形式的主要原因为: (1) 伽利略变换和洛伦兹变换是两个有着本质区别的变换, 前者基于绝对时空观, 后者基于相对论时空观; (2) 采取的路径不同, 公式(19)的推导直接从四大物理定律的积分式出发, 因而没有相同的形式.

4.2 电位移矢量的扩展: 动生极化项

在实际中, 外部作用力通常使介质的形状或边界随时间发生变化. 以纳米发电机为例, 其表面的静电荷由接触起电或压电效应而产生, 外部机械触发使介质的形状和运动边界发生变化, 介质的几何结构和边界具有时间依赖性. 另外, 表面上分布的静电荷会导致介质发生极化. 该极化与存在外电场时的感应极化 \mathbf{P} 不同, 它主要由外界的作用力引起, 用 \mathbf{P}_S 表示^[24]. 此时电位移矢量表达式为(图3所示)

$$\mathbf{D}' = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} + \mathbf{P}_S = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} + \mathbf{P}_S, \quad (20)$$

公式中第一项 $\varepsilon_0 \mathbf{E}$ 是自由电荷引起的电场, 第二项 \mathbf{P} 代表存在外电场时介质内部的极化, 称为感应极化; 第三项 \mathbf{P}_S 称为动生极化. 虽然形式上 \mathbf{P} 和 \mathbf{P}_S 似乎可以合并到一起, 但两者物理意义明显不同, \mathbf{P} 是电场作用下介质感应所产生的极化, 而 \mathbf{P}_S 是由于带电介质之间相对运动而产生的动生极化, 因此它不能被 \mathbf{P} 吸收掉. 归纳起来, 动生麦克斯韦方程组变形为^[21,22]

$$\nabla \cdot \mathbf{D}' = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}_S, \quad (21a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (21b)$$

$$\nabla \times (\mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (21c)$$

$$\nabla \times [\mathbf{H} + \mathbf{v} \times (\mathbf{D}' + \mathbf{P}_S)] = \mathbf{J}_f + \rho_f \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}_S + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}'. \quad (21d)$$

该方程组可直接描述运动介质表面存在动生极化项时发生在介质内部的电磁现象. 注意此方程组与20

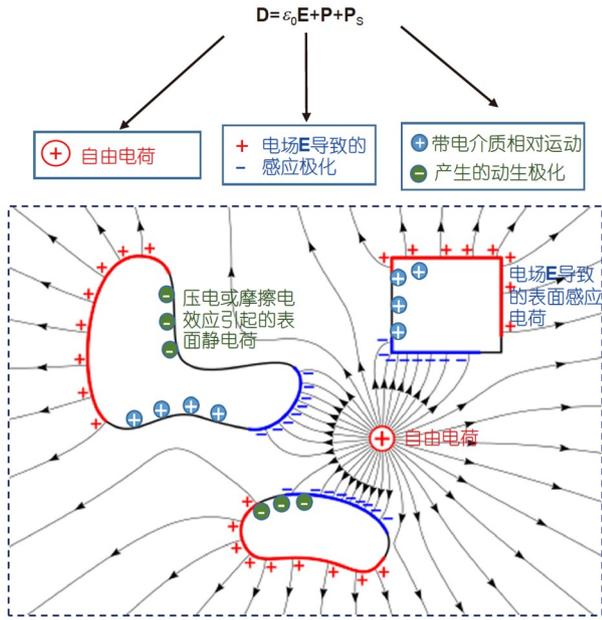


图3 (网络彩版图)重新定义的位移矢量 \mathbf{D} 由三项组成, 其中 \mathbf{E} 表示外界自由电荷产生的电场引起, \mathbf{P} 代表介质内的感应极化, \mathbf{P}_s 表示带电介质相对运动产生的动生极化。

Figure 3 (Color online) Schematic showing the three terms in the newly defined displacement vector \mathbf{D} , and their represented space charges in the diagram. The charge density corresponding to \mathbf{P}_s is that from surface contact electrification effect in TENG.

世纪50年代末朱兰成提出的运动介质中的电磁学表达式有一定的区别^[17]。朱氏理论与闵可夫斯基的模型也不同, 朱氏公式重新对介质的微观极化和磁化规律进行了分析, 考虑介质运动速度对极化和磁化的影响后引入极化电流项 $\nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{v}_0)$ 和磁流项 $\nabla \times (\mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{v}_0)$ 。文献[25]利用空间平均的方法, 证明朱公式中的电流项 $\nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{v}_0)$ 来源为分子偶极矩造成的额外电流。介质静止时, 分子的相对速度 \mathbf{v}_n 很小。当介质运动时, 忽略介质内分子的速度 \mathbf{v}_n , 将 \mathbf{v}_n 近似认同 \mathbf{v}_0 , 其极化与磁化可以认为是由电荷与电流的多极矩造成的。介质运动效应对麦克斯韦方程组贡献了额外的电流项 $\nabla \times [(\mathbf{P} - \mathbf{Q}) \times \mathbf{v}_0]$ 。闵可夫斯基与朱氏模型中的 \mathbf{D} , \mathbf{H} 和 \mathbf{D}' , \mathbf{H}' 都不相等, 但这种不相同造成的观测效应(偶极矩、四极矩效应等)非常小。意味着介质运动造成的额外效果可以统一吸收到本构关系中, 麦克斯韦方程组的形式保持不变。

本文与朱氏的模型既有区别也存在联系。不同之处在于引入的 \mathbf{P}_s 项表示在准静态条件下非电场引起的

极化, 比如由接触起电或者压电效应引起的表面极化电荷。如果朱氏微观模型成立, 当带电介质(包含 \mathbf{P}_s)运动时, 其极化与磁化由两方面的原因引起: 其一为介质内分子运动造成的多极矩; 其二为介质本身所带的电荷随着介质运动。即便前者造成的观测效应可以忽略, 但是后者不能, 这种双重作用下的效果不能统一到本构关系中, 意味着此时的麦克斯韦方程组不满足洛伦兹协变性。朱氏理论也是非相对论理论, 并不保持洛伦兹协变性。注意, 摩擦纳米发电机之所以能将机械能转换为电能的本质原因在于 \mathbf{P}_s 项的存在, 这已经在大量实验中得到验证^[26-28]。

4.3 低速运动介质的动生麦克斯韦方程组扩展到形状可变的介质

考虑更为实际和复杂的情形, 即当运动介质的形状和体积随时间变化, 并以任意速度运动时的情形。在实验室坐标系观测介质的运动时, 假设方程(21)中的物理量都是 (\mathbf{r}, t) 的函数时, 意味着既是时间的函数又是空间位置的函数, 方程变形为^[21,22]

$$\nabla \cdot \mathbf{D}' = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}_s, \quad (22a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (22b)$$

$$\nabla \times (\mathbf{E} - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (22c)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times [\mathbf{H} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times (\mathbf{D}' + \mathbf{P}_s)] \\ = \mathbf{J}_f + \rho_f \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{D}' + \mathbf{P}_s], \end{aligned} \quad (22d)$$

方程组(22)描述任意低速、形状可变、外界机械驱动的介质运动电磁现象。如前所述, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}$ 表示洛伦兹力产生的电动势, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times (\mathbf{D}' + \mathbf{P}_s)$ 代表介质运动产生的磁场的环量, $\frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{D}' + \mathbf{P}_s]$ 表示感应位移电流与动生位移电流之和。进一步, 当速度场是平移速度 $\mathbf{v}_T(t)$ 与局部的相对运动/旋转速度 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ 之和时, 得到 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_T(t) + \mathbf{v}_r(\mathbf{r}, t)$ 。若移动速度与位置无关, 但随时间变化时, 表示介质的“质心”或“几何中心”的移动速度, 若相对/旋转速度与位置有关, 则表示所有组件/部件做围绕“质心”的局部相对运动。上述公式可以用来描述带电固体、流体介质以任意速度运动时的电磁场演化规律^[21,22]。

考虑到相对论效应所引起的修正, $\alpha = 1 - \frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu \epsilon}$ 因子需要添加在含有介质运动速度的相关项前面^[29,30]. 因此, 方程组(22)可以拓展为

$$\nabla \cdot \mathbf{D}' = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}_s, \quad (23a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (23b)$$

$$\nabla \times (\mathbf{E} - \alpha \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (23c)$$

$$\begin{aligned} & \nabla \times [\mathbf{H} + \alpha \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times (\mathbf{D}' + \mathbf{P}_s)] \\ &= \mathbf{J}_f + \alpha \rho_f \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{D}' + \mathbf{P}_s]. \end{aligned} \quad (23d)$$

在真空中, $\alpha = 0$, 所有的运动速度相关项消失; 此时, \mathbf{P}_s 也变为零, 方程组回归到经典的麦克斯韦方程组.

4.4 力-电-磁多场耦合下的能量守恒定律及其方程组的非协变性

低速运动介质系统的电磁场能量是否守恒以及能量如何流动是我们关注的另一重点. 电荷的定域守恒性说明全空间的电荷总量不随时间的改变而改变, 一个区域内的电荷在单位时间内的增减与经过边界的电荷增减相同. 运用同样的思路, 我们分析低速运动介质系统的电磁场能量、能流演化规律. 不同于常见的静止介质系统的能量转换过程, 由于运动介质与电磁场的相互作用, 电磁场与运动介质之间的能量发生相互转换. 当存在外力作用引起的 \mathbf{P}_s 项时, 外力、电磁场和运动介质三者之间发生能量交换, 导致力-电-磁多场耦合的情况. 我们引入两个场量, 即标量场(电磁场的能量密度 u)和矢量场(电磁场的能流密度 \mathbf{S})来研究力-电-磁多场耦合下的能量变化规律.

一般情况下, 如果已知静止介质的能量密度 u 和能流密度 \mathbf{S} 的表达式, 则运动介质的相应表达式可以通过类似洛伦兹变换的方法求解. 因为一个坐标系中的张量分量可以从另一个坐标系中的张量分量推导^[4,5]. 此处, 我们采用与动生麦克斯韦方程组类似的方法处理^[21,22]. 根据坡印亭矢量的定义, 单位时间内电磁场通过单位面积向外传递的能量为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (24a)$$

电磁场的能量密度变化率为

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (24b)$$

含有 \mathbf{P}_s 项的低速运动介质时:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial t} \mu - \nabla \cdot \mathbf{S} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_f + \rho_f \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \\ & - \left\{ \mathbf{H} \cdot [\nabla \times (\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B})] + \mathbf{E} \cdot [\nabla \times ((\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times (\mathbf{D}' + \mathbf{P}_s)))] \right\}. \end{aligned} \quad (24c)$$

上式说明, 存储在一定体积中的电磁场能量与从该体积表面辐射出去的电磁能量之和等于电场对外部自由电流和自由电荷做的功, 加上介质在空间运动引起的电磁能量密度的变化. 因此, 当存在外力作用时, 系统的电磁能量不守恒, 动生麦克斯韦方程组不保持洛伦兹协变性, 但此时该封闭系统的总能量守恒. 若速度仅是时间函数 $\mathbf{v}(t)$, 上式简化为

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial t} \mu - \nabla \cdot \mathbf{S} \\ &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_f + \left\{ \mathbf{H} \cdot [(\mathbf{v}(t) \cdot \nabla) \mathbf{B}] + \mathbf{E} \cdot [(\mathbf{v}(t) \cdot \nabla) (\mathbf{D}' + \mathbf{P}_s)] \right\}, \end{aligned} \quad (24d)$$

表明介质运动带来的效应是产生电磁波的“源”(动生电), 此时运动的介质可以看作是“运动的电磁场源”.

4.5 动生麦克斯韦方程组与麦克斯韦方程组的耦合与衔接

介质运动是产生电磁波的源之一(动生电), 描述介质源里面的电磁现象使用动生麦克斯韦方程组. 该方程组适用于计算工程实际中有多个动态介质的情况, 包括动生电的输出功率和相应的电磁辐射以及与物质的相互作用. 对于人类科技所涉及的低速介质运动系统, 这是一个非常好的近似. 另外, 在动生麦克斯韦方程组中, 我们引进了与力相关的 \mathbf{P}_s 项. 当存在外力时, 力、介质和电磁场发生能量交换, 系统的电磁能量不守恒, 但封闭系统总的能量守恒. 特别地, 介质里面的光速为 c/n , n 为介质的折射率, 因此在运动中不存在超光速的问题; 不超过光速指的是不超过真空中的光速. 当源产生的电磁波在空间传播时可以用狭义相对论和麦克斯韦方程组来描述. 真空里面的光速和介质里面的光速在介质界面处发生交汇. 因此, 动生麦克斯韦方程组和经典麦克斯韦方程组两者“分区域”管辖, 互相耦合, 平行应用, 不矛盾(图4所示).

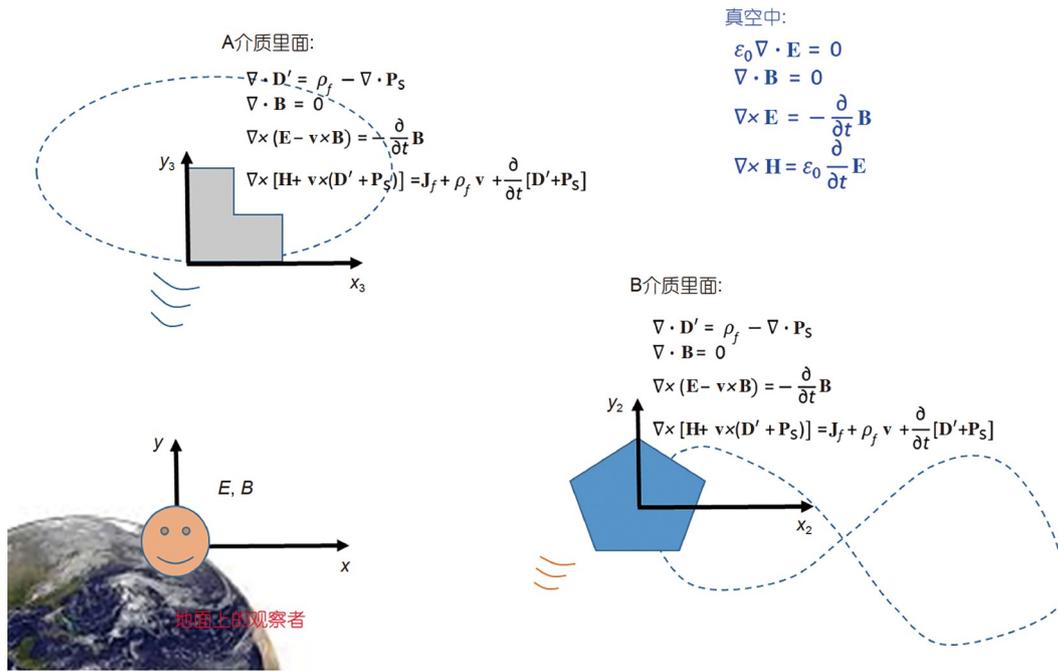


图 4 (网络彩版图)描述介质中电磁现象的动生麦克斯韦方程组与电磁波在空间辐射时的经典麦克斯韦方程组, 两者分“区域”管理, 平行应用, 不矛盾
 Figure 4 (Color online) Conjunction of the Maxwell equations for a mechano-driven system and the standard Maxwell equations as the media are moving along the dashed trajectories, and the observation is done on earth (in Lab frame).

4.6 关于具有加速度运动介质的非惯性系中的麦克斯韦方程组

标准的麦克斯韦方程组(1)是在伽利略时空观下推导得到的, 即时间和空间是独立的. 依据相对论理论, 微分形式的麦克斯韦方程组具有洛伦兹协变性. 实际上协变性成立的前提条件是方程组描述的是惯性系中的电磁现象, 因为对于物理现象的数学描述只有在惯性系中才具有协变性. 但是严格的惯性系是理想情况, 在实际情形下几乎不存在. 因此, 当非惯性系中有外力作用时, 方程组的协变性可能无法成立. 比如, 考虑一个电荷在不同参考系中所受洛伦兹力的情况: 在实验室坐标系中, 电荷 q 以速度 \mathbf{v} 运动, 所受到的洛伦兹力为: $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. 在共动坐标系中, 电荷 q 相对于该坐标系本身处于静止状态, 因此只受到电场 \mathbf{E} 的作用, 则 $\mathbf{F}' = q\mathbf{E}'$. 根据力学基本原理, 如果两个坐标系都是惯性系, 则要求 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$: 电荷在惯性系中所受到的力是相同的; 因此, $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$. 只有在此条件下, 电场矢量的变换公式: $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}$ 才成立(注意这里是 \mathbf{v}_0 而

不是 \mathbf{v}). 如果不是惯性系, 则必有外力作用, 此时 $\mathbf{F}' \neq \mathbf{F}$, $\mathbf{E}' \neq \mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}$, 法拉第电磁感应定律(1b)和安培定律(1d)的表达式可能需要改变. 因此利用法拉第电磁感应定律处理非惯性系的相关问题时, 一定要考虑是否需要修正或延伸表达式, 这一点在一般的教课书中未提到. 因为教材中基本上描述的是惯性系中的电磁现象; 反之, 则会出现偏差. 同样的道理也适用于安培-麦克斯韦定律. 因此, 标准微分型麦克斯韦方程组的表达式应该只适用于惯性系.

5 关于运动介质电动力学理论的对比与讨论

爱因斯坦提出的狭义相对论迫使我们改变了对时间和空间的理解, 相对论时空观对现代物理学和物理学家产生了不可估量的影响. 即便如此, 我们不应忽略以伽利略变换为基础的时空观——空间和时间相互分离的时空观. 我们更不能忽视牛顿以及牛顿力学在整个科学史尤其是17世纪科学发展中的地位. 牛顿的工作将以伽利略为代表的数学描述传统和以笛卡儿为

代表的机械论哲学传统结合起来, 使得17世纪的科学达到了相当的高度, 成为代表人类智慧的最高成就之一^[31]. 在不同的历史时期, 面对不同的科学技术问题, 科学的历史任务不同, 由此发展出各种各样的研究范式. 从时空观的角度, 我们对解决运动介质电动力学问题的主要方法进行了初步总结.

(1) 相对论电动力学(relativistic electrodynamics)

1) 在相对论时空观基础上, 对于静态介质的麦克斯韦方程组进行从实验室坐标系($\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$)到运动坐标系($\mathbf{E}'(\mathbf{r}', t')$, $\mathbf{B}'(\mathbf{r}', t')$)的洛伦兹变换;

2) 惯性系下匀速 \mathbf{v}_0 直线运动的准确理论, 适合于任意大小的速度;

3) 两个做相对运动的观察者所观测到的同一个电磁现象的表述;

4) 对于非惯性系和不匀速运动的介质, 数学推算非常复杂, 不能简便用于工程技术实践.

(2) 伽利略电磁学(Galilean electromagnetism)

1) 对于介质运动做瞬时准静态近似处理(instantaneous quasi-static approximation under Galilean transformation); 从静态介质的麦克斯韦方程组出发, 基于实验室坐标系中描述的场($\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$), 利用洛伦兹变换近似和伽利略变换来处理匀速运动介质的电磁场;

2) 适用于惯性系下的低速匀速 \mathbf{v}_0 介质运动;

3) 电极限和磁极限近似下的方程组不具有洛伦兹协变性, 但为工程师和物理学家提供了一个分析大量电磁现象的有效方法.

(3) 动生麦克斯韦方程组(Maxwell equations for a mechano-driven slow-moving media system)

1) 从麦克斯韦方程组的积分式出发, 基于实验室坐标系中的场($\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$), 处理低速变速运动的、具有复杂运动轨迹的、多个运动介质的电磁场动力学演化过程;

2) 适用于低速变速运动介质 $\mathbf{v}(t)$; 适用于介质形状和边界可变的介质 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$;

3) 方程组引入力-电-磁的耦合场; 由于外力的作用 \mathbf{P}_s 项, 系统的电磁能量不守恒, 方程组不满足洛伦兹协变性, 但封闭系统的总能量守恒;

4) 描述同一个观察者所观测到的多个具有相对运动介质的电磁现象, 且介质之间可以有相互作用.

总之, 在相对论时空观基础上发展出的相对论电

动力学理论适用于惯性系, 麦克斯韦方程组保持协变性. 伽利略电磁学适用于研究惯性系中的低速匀速运动介质, 电极限和磁极限时的方程组不保持洛伦兹协变性. 而动生麦克斯韦方程组可适用于非惯性系, 引入力-电-磁的耦合场, 用来探究低速变速运动介质以及介质形状和边界随时间变化时的电磁场动力学演化规律, 方程组同样不保持协变性.

6 总结

爱因斯坦说过, 公式化一个问题往往比找到它的数学解更为重要, 后者可能只是一个数学或实验技能的问题. 提出新问题、新的可能性, 从新的角度看待老问题, 需要创造性的想象力, 这标志着科学的真正进步. 运动介质的电磁场动力学演化过程一般从狭义相对论出发进行计算. 假定介质的基本性质和本构关系在相对静止的 S' 系(共动坐标系)已知, 通过洛伦兹变换求得介质在匀速直线运动的 S 系(实验室坐标系)中的电磁场动力学变化规律, 麦克斯韦方程组满足洛伦兹协变性. 但在地球上所涉及的工程应用中, 几乎不存在真正的惯性系. 在非惯性系, 若速度和时间均与介质的位置有关时, 相对论电动力学的处理方法太复杂, 必须进行近似处理, 以避免繁琐的数学推导. 本文除了介绍狭义相对论和欧洲学派发展的伽利略电磁学, 重点解释我们从麦克斯韦方程组的积分形式出发, 推导出了低速运动介质的动生麦克斯韦方程组. 该方程组适用于非惯性系, 引入力-电-磁的耦合场, 在有外界机械能输入时系统的电磁能量不守恒, 不保持洛伦兹协变性. 采用伽利略变换, 可近似处理低速变速运动介质以及介质形状和边界随时间变化时的电磁场动力学演化规律, 方程组同样不保持协变性. 事实上, 伽利略变换下得到的结果足以准确描述在地球上利用宏观物体所做的相关实验(除非考虑基本粒子的运动, 如电子和中子).

运动介质电动力学理论有广泛的应用价值, 比如用来解释频率达MHz~GHz的摩擦电纳米发电机的工作机理^[26], 探索机械驱动电磁辐射对无线信号传输的意义. 重新深入研究火车、汽车和飞机等移动物体的无线通信, 提高信号发射和传输的稳定性. 特别地, 我们已经可以利用散射波的相位信息形成高分辨率图像, 这在电子显微镜和光学全息术中已得到应用, 但是

电磁波的相位信息能否应用于高分辨率的雷达成像? 全文详细总结如下.

(1) 在惯性系, 对于匀速直线运动的介质, 麦克斯韦方程组的微分形式保持洛伦兹协变性, 但不确定其积分形式是否依然保持协变性. 如果不保持, 其积分形式转换成微分形式的过程中发生了什么? 如果保持, 则当运动介质的形状和边界发生变化时, 积分形式的麦克斯韦方程组的协变性如何改变? 有学者认为电磁波(光子)没有质量, 必须用洛伦兹变换得到运动介质的电磁场. 我们认为: 有质量的低速运动介质是电磁场的源之一, 可以用伽利略变换近似处理工程实际中的具体问题.

(2) 麦克斯韦方程组的标准微分形式保持洛伦兹协变性, 但是否只有满足洛伦兹协变性才能称为麦克斯韦方程组? 此观点值得商榷. 大约160年前麦克斯韦提出电磁理论之后, 很长一段时间没有受到当时学术界的认可. 后来经赫维赛德等人进一步将方程组简化改进, 电磁学理论才逐渐在英国、欧洲等地流传开来. 爱因斯坦曾将麦克斯韦方程组称为麦克斯韦-赫维赛德、麦克斯韦-闵可夫斯基方程组. 事实是, 洛伦兹协变性只出现在惯性系. 而有外力作用的系统不是惯性系, 推导出的方程不应该具有洛伦兹协变性.

(3) 一般情况下, 共动坐标 S' 系和实验室坐标 S 系中的电磁场可通过狭义相对论变换处理. 如果运动介质速度的大小和方向都随时间变化, 是否必须用广义相对论来研究该系统的电磁行为? 如果是, 则数学推导过程将非常复杂, 在工程实践中难以做到; 相反, 伽利略变换可能更具实际操作意义. 尽管我们必须用洛伦兹变换处理宇宙中的电磁现象, 但对于地球上的工程电磁现象, 我们认为伽利略变换已经足够准确. 我们的观点与Rousseaux的结论不谋而合^[12,13]. 伽利略电磁学为工程师和应用物理学家研究分析大量电磁现象提供了一个行之有效的方法. 从另外一个角度, 研究非惯性系中的“洛伦兹变换”将是一个很有趣的理论物理问题.

(4) 麦克斯韦方程在惯性参考系中保持协变性, 那么在非惯性呢? 在有外力作用的系统中如何变化? 似乎不应该将在惯性系中麦克斯韦方程组的洛伦兹协变性推广到更为普适的一般情况. 在实际中, 我们处理的几乎所有案例都是与加速/减速相关的运动, 处在典型的非惯性系框架之内. 因此, 改变固有思路, 采用新方

法, 即使不满足洛伦兹协变性, 但可以解决在物理应用和工程技术中的难题, 也不失为一种合适的方案. 这是我们强调的重点, 与理论物理学家的观点不同. 理论物理学家一般认为麦克斯韦方程组必须保持洛伦兹协变性, 保持物理学纯粹的对称性和完美性, 并着力实现四大力的最后统一. 然而, 在应用物理和工程技术中, 有用性和有效性或许比“纯粹的美”更重要! 这是我们在这项工作和参考文献^[21]中提出的共同理念.

(5) Rousseaux在2013年曾指出^[12]: “闵可夫斯基的开创性工作距今已超过一个世纪, 连续介质电动力学仍然是一个持续研究的课题, 应该尽早纳入物理课程中”. 虽然伽利略电磁学更具实用性、物理图像更清晰, 但现在大部分讲座是关于狭义相对论的报道, 与伽利略电磁学相关的讲座较少. 这种现状很有可能造成一代又一代的学生对这一经典领域的前沿研究缺乏了解. 因此, 我们建议在电磁学和电动动力学的教学中增加相关伽利略电磁学的内容, 使教材为学科的最新发展提供基础支撑. Rousseaux同时说过^[12]: “虽然伽利略电磁学是在相对论之后被发现的, 其处理方法却似乎更接近牛顿力学. 这两种理论的作用尽管都有局限性, 但不能否认, 他们在解释伽利略现象方面非常有用. 让我们重温庞加莱在相对论发现之后关于牛顿理论的预言: 今天有一些物理学家希望接受新的观点…那些没有这种想法的人可以继续保持他们原有的思路, 以免其旧习惯受到干扰. 我相信, 在我们之中, 这种不同意见可能持续很长一段时间. 让我们祝愿: 在实际应用中伽利略电磁学取代狭义相对论……”.

7 后记

科学哲学家皮埃尔·迪昂说过: 物理学理论是符号的体系, 它一般通过物理量的定义、假设的选择、理论的数学展开以及理论与实验的比较四个基本过程后完成初步构建^[32]. 动生麦克斯韦方程组及其成立的边界条件能否触及到一个新的理论框架? 进而发展出新的基础规则? 影响相关的科学抑或技术研究领域? 时间会给出答案. 同样如皮埃尔·迪昂所说: “科学的逻辑犹如大浪淘沙, 冲尽黄沙始到金; 历史的逻辑恰似无情之筛, 留下的哪有秕糠杂质”. 最后, 让我们以爱因斯坦关于“爬山理论”的论断结尾: 创造新理论并不是摧毁

一个旧谷仓然后在其位置上建造一座摩天大楼。它就像爬山一样, 从更新的、更广阔的视角去发现登山起点和周围环境之间的意想不到的联系。”希望本文达到此目的。

致谢 感谢杨金民教授、王飞教授、王群教授和李田军教授的热情讨论!

参考文献

- 1 Linag C B, Cao Z J, Chen B T. General Physics: Extension of Electromagnetics (in Chinese). Beijing: Higher Education Press, 2018 [梁灿彬, 曹周健, 陈埏陶. 普通物理学教程. 电磁学拓展篇. 北京: 高等教育出版社, 2018]
- 2 Minkowski H. Das Relativitätsprinzip. *Annalen der Physik*, 1915, 352: 927
- 3 Minkowski H. The Principle of Relativity. Calcutta: University Press, 1920
- 4 Pauli W. Relativity Theory. Ling H D, Zhou W S, trans. Beijing: Higher Education Press, 2020 [泡利. 相对论. 凌德洪, 周万生, 译. 北京: 高等教育出版社, 2020]
- 5 Landau L D, Lifshitz E M. Field Theory. Lu X, Ren L, Yuan B N, trans. Beijing: Higher Education Press, 2012 [Landau L D, Lifshitz E M. 场论. 鲁欣, 任朗, 袁炳南, 译. 北京: 高等教育出版社, 2012]
- 6 Landau L D, Lifshitz E M. Electrodynamics of Continuous Media. New York: Pergamon Press, 1984
- 7 Jackson J D. Classical Electrodynamics. 3rd ed. John Wiley & Sons, 1999
- 8 Maxwell J C. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Phil. Trans R Soc Lond*, 155, part I, 1865
- 9 David J G. Introduction to Electrodynamics. Jia Y, trans. Beijing: China Machine Press, 2021 [大卫·格里菲斯. 电动力学导论. 贾瑜译. 北京: 机械工业出版社, 2021]
- 10 Wang Y P. Engineering Electrodynamics (in Chinese). Xi'an: Xidian University Press, 2007 [王一平. 工程电动力学. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2007]
- 11 Le Bellac M, Lévy-Leblond J M. Galilean electromagnetism. *Nuovo Cim B*, 1973, 14: 217–234
- 12 Rousseaux G. Forty years of Galilean Electromagnetism (1973–2013). *Eur Phys J Plus*, 2013, 128: 81
- 13 de Montigny M, Rousseaux G. On the electrodynamics of moving bodies at low velocities. *Eur J Phys*, 2006, 27: 755–768
- 14 Larsson J. Electromagnetics from a quasistatic perspective. *Am J Phys*, 2007, 75: 230–239
- 15 Heras J A. The Galilean limits of Maxwell's equations. *Am J Phys*, 2010, 78: 1048–1055
- 16 Herbert D. Physik: Elektrodynamik, relativistische Physik, Walter de Gruyter, 1997
- 17 Paul P, Haus H A. Electrodynamics of Moving Media. Cambridge: MIT Press, 1967
- 18 Dai X, Sha W, Chen H. For Maxwell's Equations, Does the Low Speed Limit of Lorentz Transformation Equal to Galilean Transformation? (in Chinese). *Physics*, 2022, 51: 145 [戴希, 沙威, 陈昊. 对于麦克斯韦方程组, 洛伦兹变换的低速极限是伽利略变换吗? *物理*, 2022, 51: 145]
- 19 Barnett S J. On electromagnetic induction. *Phys Rev*, 1913, 2: 323–326
- 20 Barnett S J. Free charges, polarization and polarization charges, especially those produced when an insulator moves in a magnetic field. *Am J Phys*, 1939, 7: 28–35
- 21 Wang Z L. On the expanded Maxwell's equations for moving charged media system-general theory, mathematical solutions and applications in TENG. *Mater Today*, 2022, 52: 348–363
- 22 Wang Z L. Maxwell's equations for a mechano-driven, shape-deformable, charged media system, slowly moving at an arbitrary velocity field $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. arXiv: [2202.13768](https://arxiv.org/abs/2202.13768)
- 23 Cui X. From Faraday's Law of Induction to Maxwell's Equations of Motion (in Chinese). In: Proceedings of the Ninth Annual Conference of the Institute of Circuits and Signaling Systems, Electromagnetic Field Teaching and Textbook Research Association in Higher Education Institutions. 2014 [崔翔. 由法拉第感应定律谈运动中的麦克斯韦方程组. 见: 高等学校电路和信号系统、电磁场教学与教材研究会第九届年会论文集. 2014]
- 24 Wang Z L. On the first principle theory of nanogenerators from Maxwell's equations. *Nano Energy*, 2020, 68: 104272
- 25 Wang W Y, Xu Y. Lorentz covariant form of electromagnetism in the moving media (in Chinese). *Phys Eng*, 2018, 28: 13 [王雯宇, 许洋. 运动介

- 质洛伦兹协变电磁理论. 物理与工程, 2018, 28: 13]
- 26 Wang Z L. From contact electrification to triboelectric nanogenerators. *Rep Prog Phys*, 2021, 84: 096502
- 27 Shao J, Willatzen M, Wang Z L. Theoretical modeling of triboelectric nanogenerators (TENGs). *J Appl Phys*, 2020, 128: 111101
- 28 Shao J, Yang Y, Yang O, et al. Designing rules and optimization of triboelectric nanogenerator arrays. *Adv Energy Mater*, 2021, 11: 2100065
- 29 Rozov A L. Modelling of electrodynamic phenomena in slowly moving media. *Z NATURFORSCH A*, 2017, 72: 757–762
- 30 Wang F, Yang J M. Relativistic origin of Hertz-form and extended Hertz-form equations for Maxwell theory of electromagnetism. arXiv: [2201.10856](https://arxiv.org/abs/2201.10856)
- 31 Richard S W. *The Construction of Modern Science*. Zhang B T, trans. Beijing: The Commercial Press, 2020 [理查德·韦斯特福尔. 近代科学的构建. 张卜天, 译. 北京: 商务印书馆, 2020]
- 32 Pierre D. *The Aim and Structure of Physical Theory*. Li X M, trans. Beijing: The Commercial Press, 2011 [皮埃尔·迪昂. 物理学理论的目的与结构. 李醒民, 译. 北京: 商务印书馆, 2011]

Maxwell's equations for a mechano-driven varying-speed motion media system under slow motion and nonrelativistic approximations

WANG ZhongLin^{1,2,3} & SHAO JiaJia^{1,2}

¹ *Beijing Institute of Nanoenergy and Nanosystems, Chinese Academy of Sciences, Beijing 101400, China;*

² *School of Nanoscience and Technology, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;*

³ *School of Materials Science and Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta 30332-0245, USA*

The governing rules of the electromagnetic fields for a moving media system are important for engineering applications and physics. A systematic comparison of special relativity and Galilean electromagnetism is first given. Then, starting from the integral form of the four physics laws, the Maxwell equations for a mechano-driven slow-moving media system are derived. Through the coupled mechanical force-electric-magnetic fields, the expanded Maxwell's equations should reveal the dynamics of an electromagnetic field for a general case, in which the medium has a time-dependent volume, shape, and boundary and may move in an arbitrary, slow-moving velocity field $\mathbf{v}(r, t)$ in a noninertial system. A mechano-induced polarization term \mathbf{P}_S is introduced in the displacement vector to represent the polarization produced by the relative movement of the charged media under an external force. Notably, the additional term \mathbf{P}_S is different from the medium polarization \mathbf{P} because of the external electric field \mathbf{E} ; thus, these terms cannot be merged even in mathematical form. Most importantly, the expanded equations may not satisfy Lorentz covariance because the energy of electricity and magnetism is not conservative under external mechanical energy, but the total energy of the closed system is conservative. At last, the charged moving media are confirmed to be sources of generating electromagnetic radiation (a motion-generated electromagnetic field). The generated electromagnetic wave within the medium can be described using the expanded Maxwell equations. Its propagation in space can be thoroughly characterized using the standard Maxwell equations and special relativity, which meet at the medium interface governed by the boundary conditions.

Maxwell's equations for mechano-driven slow-moving media, mechano-induced polarization, special relativity

doi: [10.1360/SST-2022-0176](https://doi.org/10.1360/SST-2022-0176)